رده‌بندی مثال‌ها در آموزش مفاهیم ریاضی

احمد واشقانی فراهانی
کارشناس ارشد آموزش ریاضی و دبیر ریاضی شهر اراک

چکیده

توجه ویژه به مثال‌ها، در افزایش توانمندی یادگیرندگان و توسعه مهارت حرفه‌ای معلمان ریاضی، مفید و مهم است. کاربرد وسیع مثال‌ها از زمان‌های دور، در متون ریاضی ثبت شده است و نشان‌دهنده اهمیت و اقبال عمومی، نسبت به درک مفاهیم از طریق مثال‌های آشناست تا از این طریق، تجرید ریاضی ملموس شود. تعریف‌ها کلی و انتزاعی‌اند و به‌عنوان مرجع استفاده می‌شوند، در صورتی‌که معناها عموماً به کمک مثال‌ها، شکل می‌گیرند. معناهای عمیق، از طریق ورزیدگی با مثال‌های آشنا بیرون می‌آیند و یادگیرندگان، از طریق مثال‌های ملموس، استنباط و تعمیم، مفاهیم را بازسازی می‌کنند. مثال‌ها می‌توانند مانند ابزار تبادل فرهنگی بین یادگیرندگان و مفاهیم، یا نظریه‌ها و تکنیک‌های ریاضی باشند. مثال‌ها ابزار مهمی برای ایجاد ارتباط با ایده‌های انتزاعی ریاضی و ارتباط‌ها و تبادلات ریاضی یک فرد با خود و دیگران است. با توجه به اهمیتی که مثال‌ها در جریان یاددهی- یادگیری ریاضی دارند، در این مقاله، چند طبقه‌بندی از مثال‌های ریاضی، ارائه می‌شوند.

کلیدواژه‌ها: مثال آموزشی، تولید مثال، رده‌بندی مثال

مثال آموزشی[1]

از «مثال آموزشی»، به‌عنوان نمونه، شاهد، تصویر، مورد یا مؤلفه‌ای از یک ایده، فرایند یا رده‌ای[2] از مفاهیم استفاده می‌شود (زازکیس و لیکین، ۲۰۰۸). مثال‌ها در واقع، بیان ویژگی‌های کلیدیِ تعریف‌ها و توضیح‌های آموزشی هستند که در شکل‌گیری حل یک مسئله، دخالت دارند. به تعبیر زاسلاوسکی(۲۰۰۸)، هر مثالی که معلم در فرایند آموزش و در یک زمینه، از مفهومی خاص ارائه می‌دهد، یک مثال آموزشی است. البته مثال آموزشی در حوزه ریاضی، می‌تواند مثالی از زمینه‌های سایر علوم و خارج از حوزه ریاضی مانند فیزیک و شیمی و زیست‌شناسی و ادبیات و غیره باشد که حاوی نکات مفهومی و مؤثر در تدریس ریاضی‌اند. مثلاً عبارت «اگر باران به کوهستان نبارد، به سالی دجله

گردد خشـــک رودی»، یک بیت شـــعر از حوزه ادبیات اســـت، ولی می‌توان به وســـیله آن، ترکیب شرطی در ریاضی را به یادگیرنده، معرفی کرد. طبق نظر محققان آمـــوزش ریاضی، مثال‌های آموزشـــیِ ریاضی را از نظر فراینـــد تولید، ماهیت و نوع کاربردشـــان، می‌توان در طبقه‌بندی‌های مختلف قـــرار داد که در این بخش، به بعضی از آنها می‌پردازیم.

۱. رده‌بندی مثال‌ها با توجه به فرایند یا نحوه تولید آن‌ها

دالبرگ و هاســـمن (۱۹۹۷، نقل شده در کثیری، ۱۳۸۸) از منظر نحوه تولید، مثال‌ها را در چهار رده زیر، دسته‌بندی کرده‌اند:

● **مثال‌هایی که از حافظه فراخوانی می‌شوند:** این‌گونه مثال‌ها، معمولاً اولین مثال‌های در دســـترس بـــوده و بدون تفکر زیاد در مورد مســـئله، و با تکیه بر محفوظات، به عنوان اولین جواب ممکن بیان می‌شوند. در ایـــن مثال‌ها، به دلیل فوریت در ارائه یا عدم تفکر و تمرکز کافی، ضریب اشـــتباه و خطا بالاست و همین، باعث می‌شود که مثال‌های نادرستِ فراوانی بین آن‌ها دیده شـــود. برای نمونه، در بیان مثال برای دو عددی که مجموعشان برابر ۱۰۰ است، ممکن است بلافاصله، فقط پاســـخ ۵۰ +۵۰ داده شود و برای تولید مثال‌های بیشتر، تولیدکننده، پاسخ‌های نادرستی ارائه دهد.

● **مثال‌هایـــی که متکی بـــر آزمون وخطا هستند:** این نوع مثال‌ها، گاهی به اتکای یک رهیافت ســـاده و آشـــنا، عرضه می‌شـــوند و یادگیرنده، تنها با اســـتفاده از روش‌های مبتدی، آن‌ها را می‌ســـازد. این گونه مثال‌ها، اعتبار زیادی ندارند و به نتیجه رسیدن یا نرسیدن آن‌ها، بیشتر شانسی است. مثلاً فرض کنید که وقتـــی از دانش‌آموز بخواهید که دو عدد مثال بزند که مجموعشان ۱۰۰ باشـــد، پاسخ‌های ۵۰+۵۰، ۹۰+۱۰ یـــا ۸۰+۲۰ را دریافت کنید. ولـــی اگر از وی بخواهید دو عددی را مثال بزند که هیچ‌کدام رقم صفر نداشـــته باشند، برایش مشکل باشد.

● **مثال‌هایی که به‌وسیله بازبینی و تغییر یا اصلاح پاسخ‌های قبلی، ارائه می‌شوند:** این مثال‌ها با همان رویکـــرد آزمون و خطا به دســـت می‌آیند، با این تفـــاوت که آزمون‌ها با یک رهیافتِ ذهنی، هدایت می‌شـــوند و مانند حالت قبل، شانســـی نیستند. این مثال‌ها در واقع، یک مرحله پیشرفته‌تر و سازمان‌یافته‌تر از حالت قبل هستند و یک قدم به پاسخ، نزدیک‌ترند و با کمی صبر و حوصله، می‌توانند به پاسخ درست منتهی شـــوند. مثلاً ممکن است اولین مثال‌ها برای دو عددی که حاصل‌ضربشان ۷۲ است، ۹×۸ یا ۱×۷۲ باشد. ولی اگر از دانش‌آموزان بخواهید تا مثال‌های بیشتری تولید کنند، ممکن است اتفاقی مشابه زیر، بیفتد:

- پاسخ نادرست ۱۱۲=۵۶×۲ ارائه شود که حاصل آن، بیشـــتر از ۷۲ اســـت. با فرصت دادن برای اصلاح مثال، تولید کننده عدد ۲ را ثابت نگاه داشته و عدد ۵۶ را به۲۶ تغییر می‌دهد (۵۲=۲۶×۲).
- در حالت (۵۲=۲۶×۲)، حاصل کمتر از ۷۲ است.
- در حالـــت ســـوم، بـــا تغییر ۲۶ بـــه ۳۶ و ثابت نگاه‌داشـــتن ۲، تولیدکنندهٔ مثال، به پاســـخ درســـت می‌رســـد. در این نمونه، انتخاب عددی با یکان ۶ برای ضـــرب در عدد ۲ در مثال اول نیز، می‌تواند ناشـــی از وجود یک «رهیافت ذهنی» باشد.

● **مثال‌هایی که بـــا روش‌های نظام‌وار تولید می‌شوند:** اســـتفاده از یک رهیافـــت منظم ذهنی در تولید مثال‌ها، نشـــانه تسلط یادگیرنده به مفهوم مورد نظر اســـت. با این رویکرد، شـــخص قادر است چندین پاسخ درست یا در بعضیِ موارد، رده‌هایی از پاسخ‌های درســـت را بیان کند. مثلاً در بیـــان مثال‌هایی فراتر از ۵۰ +۵۰ برای دو عدد که مجموعشـــان ۱۰۰ است، تولیدکننده برای ارائه مثال‌های بیشتر، از روش نظام‌وارِ افزودن به یکی از عددها و کاســـتنِ به همان مقدار از عدد دیگر اقدام کرده و مثال‌های بسیاری مانند ۴۹+۵۱ و ۴۸+۵۲ تولید می‌شوند.

۲. رده‌بندی مثال‌ها با توجه به ماهیت آن‌ها

ریسلند و میشـــنر[۳] (۱۹۷۸)، واتســـون و میسون (۲۰۰۲)، لیـــز و همـــکاران (۲۰۰۶)، الکـــوک و انگلیز(۲۰۰۸) و ریسلند (۱۹۹۴، نقل شده درگلدنبرگ و میسون، ۲۰۰۸)، چهار دسته مثال به شرح زیر ارائه دادند که دارای اهمیت زیادی هستند، ولی الزاماً از هم مجزا نیســـتند و با هم اشتراک دارند که به هر کدام به اختصار، پرداخته می‌شود.

● **مثال‌های شروع‌کننده[۴]:** این مثال‌ها در ابتدای هر بحث، برای ایجاد انگیزه و تحریک علاقه، شـــروع و ورود به مطلب، و توضیحِ چگونگی رشـــد و توسعه یک ایده، به کار می‌روند و می‌توانند زمینه مناســـبی برای ورود به تعریف‌ها و اصول و اســـتنتاج‌ها باشند. ویژگی

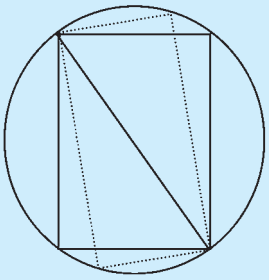
مثال‌ها می‌توانند مانند ابزار تبادل فرهنگی بین یادگیرندگان و مفاهیم، یا نظریه‌ها و تکنیک‌های ریاضی باشند. مثال‌ها ابزار مهمی برای ایجاد ارتباط با ایده‌های انتزاعیِ ریاضی و ارتباط‌ها و تبادلات ریاضیِ یک فرد با خود و دیگران است

مهم این مثال‌ها این اســت که قادرند مفاهیم اساسی را منتقــل کنند، درکشــان به آســانی و بدون کمکِ ابزارهای اضافی ممکن است و قابل تعمیم به حالت‌های کلی‌اند کــه برای نمونه، می‌توان بــه نمودار گرافیکی $y=x^2$ در تدریس ســهمی‌ها اشــاره نمــود. مثال‌های الگویابی که هدفشــان کشف یک الگو یا ارائه شواهدی برای قابل قبول بودن یک ادعاست، در رده «مثال‌های شروع‌کننده» قرار می‌گیرند.

● **مثال‌های مرجع**[5]: ایــن مثال‌ها قبلاً آموخته شــده‌اند و برای بررســی حدس‌ها یا بازبینیِ مفاهیم استفاده می‌شوند و درشکل‌دهی و توسعه درکِ و فهم، به کار می‌روند. به این مثال‌ها، به طور مکرر ارجاع داده می‌شــود، زیرا برای ایجاد ارتباط بین نتایج و مفاهیم، توانایی بالقوه و نقش اساسی دارند. برای نمونه، $y=|x|$ مثالی از یک تابع پیوسته در R است که در یک نقطه از دامنه‌اش یعنی نقطه صفر، مشتق‌پذیر نیست.

● **مثال‌هــای عــام**[6]: ایــن مثال‌هــا، کلی و انعطاف‌پذیرنــد و مانند الگو و مدل هســتند و به این دلیل، مثال‌های کلی و عام نامیده شده‌اند. این مثال‌ها می‌توانند کلیتی از مفاهیم، رویه‌ها یا اثبات‌ها را نشان دهنــد و به عنوان نماینده‌ای از یــک کلاس یا رده به حســاب آیند. فرودنتال (۱۹۸۳؛ نقل شــده در لیز و همــکاران، ۲۰۰۶)، مثال‌هایی بــا چنین قابلیت‌هایی را «پیش الگو[7]» نامیده اســت. از نظر میســون و پیم (۱۹۸۴) نیــز مثال‌های عام، بازنمایی‌های شــفافی از موضوعات کلی هستند که اجازه می‌دهند شخص، یک کلیت را از طریق یک حالت خاص، دریافت کند. برای نمونه، انتخاب حرف x برای نشــان دادن «مجهول»، اســتفاده از عبارت $2n$برای معرفی اعداد زوج، یا به کار بــردن ضابطه $y = f(x)$ برای معرفی تابع، مصداق‌هایی برای مثال‌های عام هستند.

● **مثال‌های نقض**[8]: این مثال‌ها، برای ایجاد تغییر در قضیه‌هــا، تعریف‌ها و نظریه‌ها و نیز در رد و تکذیب حدس‌ها و فرض‌های نادرست به کار می‌روند. بعضی از مثال‌های نقض مانند مجموعــه کانتور، به‌عنوان مثالِ مرجع نیز به کار می‌روند. پلد و زاسلاوســکی(۱۹۹۷)، سه نوع از مثال‌های نقض را با عنوان «مثال‌های نقض خاص»، «مثال‌های نقض نیمه عمومی» و «مثال‌های نقض عمومی یا عام[9]» مشخص نموده و برای هر کدام، نمونه‌ای معرفی کردند. مثال نقض خاص مانند عدد ۲ در رد این ادعا که «تمام اعداد اول، فرد هستند»، تنها یک مثال در این زمینه است و مثال نقض نیمه‌عمومی مانند $\sqrt{16} = \sqrt{8}\times\sqrt{2}$ در رد ایــن ادعــا که «حاصل‌ضرب دو عدد گنگ، همواره عددی گنگ اســت» که با ایجاد تغییری در آن (مانند تغییر عدد ۸ به ۱۸)، می‌توان به مثال‌های بیشتری دست یافت. مثالِ نقض‌های عمومی در اغلب موارد، برای اثبات نادرستیِ یک ادعا، استفاده می‌شوند و زمینه تولید مثال‌های نقضِ بیشتری را هم فراهم می‌کنند. مثلاً این حدس که «دو مســتطیل با قطر یکسان، باید بر هم منطبق باشند» نادرست است و شکل ۱، یک مثال نقض عمومی و کلی (عام) است، زیرا بدون ارجاع به هیچ مقدار خاصی- یعنی بدون داشتن مقادیر خاص روی شکل- نادرستیِ حدس فوق را بیان می‌کند. به‌علاوه، نکته مهم این است که این مثال نشان می‌دهد بی‌نهایت مستطیلِ متفاوت و نامنطبق برهم و با قطر یکسان، وجود دارند.



شکل ۱: نشانگر بی‌نهایت مستطیل
متفاوت با قطر یکسان (لیز و دیگران، ۲۰۰۶)

علاوه بر این‌ها، واتســون و میســون (۲۰۰۲) از «مثال‌های مرزی[10]» صحبت کرده‌اندکه از طریق آن‌ها، شــرایط لازم و مورد نیاز را بــرای برقراری یک قضیه، تعیین می‌کنند و نشــان می‌دهند کــه چگونه با عدم وجود آن شــرایط، قضیه نادرست خواهد شد. حقیقت، مثال‌های مرزی برای قضاوت در مورد حدود و شرایط درستی یا نادرســتی مفاهیم به کار می‌روند. مثلاً «هر مثلث قائم‌الزاویــه»، یک «مثال مــرزی» برای قضیه فیثاغــورث در بین انواع مثلث‌هاســت. لیز و همکاران (۲۰۰۶)، معتقدند که از دیدگاهی وســیع‌تر، می‌توان مثال‌ها را در سه دســته «مثال‌های عام»، «مثال‌های نقض» و «نامثال‌ها»، قرار داد.

به اعتقــاد گلدنبرگ ومیســون (۲۰۰۸) ارتباط ظریفی بین مثال و مثال نقض وجود دارد، با این توضیح که مثالی از یک مفهوم یا نظریه، مثال نقضی از تغییری نامناســب در ارائه همان مفهوم یا قضیه است که نقش و اهمیت آن را بیــان می‌کند و می‌تواند محرکی برای

اصلاح و بازبینی در تعریف باشد. مثلاً |x|، مثالی از یک تابع پیوسته در R (مجموعه اعداد حقیقی) است که در همان حال، مثال نقضی برای این ادعاست که «هر تابع پیوسته، در همه‌جا مشتق‌پذیر است» و فرد را به بازبینی و دقت در قضیه وایراشتراس[11] با عنوان «ساختن یک تابع پیوسته که در هیچ‌جا مشتق‌پذیر نیست»، تشویق می‌کند. به طور مشابه، عدد ۰/۹ یک نامثال از عددی است که مربع آن از خودش بزرگ‌تر است، یک مثال از عددی مثبت است که مربع آن از خودش کوچک‌تر است و یک مثال نقض برای این حدس است که «مربع کردن، عدد را بزرگ‌تر می‌کند». این واقعیت که ۲- و ۲ در تقسیم بر ۳ باقیمانده متفاوت دارند، یک مثال نقض برای این حدس است که «a و a- در تقسیم بر ۳، باقیمانده یکسان دارند» و یک مثال، برای چگونگی تعمیم و توسعه تعریف باقیمانده برای اعداد منفی است.

۳. رده‌بندی مثال‌ها با توجه به کاربرد آن‌ها

بعضی از آموزشگران ریاضی، مثال‌ها را در رده‌هایی مطابق با موقعیت‌های ویژه استفاده از آن‌ها، طبقه‌بندی می‌کنند.

مفاهیم اغلب در رده‌بندی اشیای ریاضی نقش دارند و تعیین این که آیا یک شیء ریاضی به یک رده تعلق دارد یا نه، از طریق درک مفاهیم و مقایسه اشیاء با مفاهیم، صورت می‌گیرد.

رولند و زاسلاوسکی (۲۰۰۵)، بین مثال‌هایی که جهت ارائه استدلال و به‌ویژه نمونه‌هایی از تعمیم، و مثال‌هایی که برای ایجاد مهارت در به‌کارگیری رویه‌ها به کار می‌روند، تمایز قائل شده‌اند. از نظر آنان، به دلیل نقشی که مثال‌ها در درک عمیق‌تر بعضی مفاهیم دارند، می‌توان آن‌ها را به‌عنوان تسهیل‌کننده درک و جذب یک مفهوم، رده‌بندی نمود. در مواردی دیگر، استفاده از مثال‌ها مهارت- محور هستند و اغلب برای یادگیری یک رویه مثلاً مخرج مشترک‌گیری یا حل معادله و نظایر آن به کار می‌روند؛ بدین ترتیب که یادگیرندگان، آن رویه را در چندین مثال به کار می‌برند و استفاده از آن را تمرین می‌کنند و این موضوع در ابتدا به خاطر کمک به ضبط و نگهداری فرایند رویه در ذهن و سپس رشد و توسعه اثر آن بر یادگیری استفاده می‌شود.

از بیان‌گری وتال[12] (۱۹۹۴، نقل شده در لیز و همکاران، ۲۰۰۶)، از یک مثال می‌توان در دو جنبه متفاوتِ رویه و مفهوم، استفاده کرد. مثلاً در تابع $y=2x+3$، معلم ممکن است آن را به‌عنوان مفهوم یک تابع خطی ارائه دهد، ولی دانش‌آموز آن را به‌عنوان رویه‌ای برای رسم نمودار تابع‌خطی در نظر بگیرد. بنابراین از دیدگاه پداگوژیکی، می‌توانیم بین مثال‌هایی از یک مفهوم (از قبیل مثلث‌ها، اعداد صحیح و بخش‌پذیر بر ۳، چندجمله‌ای‌ها) و مثال‌هایی از کاربرد یک رویه (مانند یافتن مساحت یک مثلث، یافتن خارج‌قسمت یک عدد صحیح بخش‌پذیر بر ۳، یافتن ریشه‌های یک جمله‌ای)، تمایز قائل شویم.

مثال‌ها می‌توانند علاوه بر نوع یا ماهیت، در هدف نیز متفاوت باشند. مثلاً از نظر ماهیت، یک مثال از مفهوم عدد حقیقی، با مثالی مانند «یافتن کوچک‌ترین مخرج مشترک» که چگونگی انجام یک رویه را شرح می‌دهد، کاملاً متفاوت است. هم‌چنین در خصوص اهداف ارائه مثال‌ها، معلم می‌تواند چگونگی پیدا کردن مخرج مشترک را با هدف آموزشِ جمع دو کسر، تشریح کند یا این که بخواهد آن را به‌عنوان یک مبنا برای یک رویه جبری تعمیم داده و به منظور توانمندی در حل مسائل و معادلات پیشرفته‌تر، عنوان کند.

چند نوع از مثال‌های کاربردی به شرح زیر، معرفی می‌شوند.

● مثال‌های حل شده[13]

منظور از «مثال‌های حل شده»، مسائلی هستند که دارای حل گام‌به‌گام‌اند و به‌صورت مرتب و منظم، تهیه و تدوین شده‌اند و بالقوه، خودآموز و خود- تشریحی‌اند. معمولاً این‌گونه مثال‌ها، توسط آموزشگران یا تهیه‌کنندگان منابع درسی، برای یادگیرندگان طراحی می‌شوند و آنان با الگوبرداری، از آن‌ها در موقعیت‌های مشابه استفاده می‌کنند (رایس و رنکل، ۲۰۰۲). از این مثال‌ها به دلیل راه حل گام به گام و تشریح هر گام، می‌توان برای معرفی و شرح تکنیک‌های خاص به کار گرفته شده استفاده نمود و آن‌ها را به‌عنوان نمونه و الگو، به یادگیرندگان ارائه کرد (آتکینسون و همکاران، ۲۰۰۰). طی دهه‌های گذشته، استفاده از مثال‌های حل شده توسط آموزشگران ریاضی، مورد تأکید قرار گرفته و تمایل یادگیرندگان به استفاده از مثال‌های حل شده، معلوم شده است (رایس و رنکل، ۲۰۰۲). زو وسیمون (۱۹۸۷؛ نقل شده در رایس و رنکل، ۲۰۰۲) بیان می‌کنند که این نوع مثال‌ها، باید به دقت طراحی و با توالی مناسبی ارائه شوند. یک عامل بسیار مهم که تأثیرگذاری مثال‌های حل شده را افزایش می‌دهد، درک عمق و چگونگی فرایندهای موجود در مثال، توسط یادگیرندگان است. به‌ویژه، پژوهشگران دریافتند که میزان تأثیر این نوع مثال‌ها، بستگی به نحوه تشریح آن‌ها دارد؛ تشریحی که هر یادگیرنده برای خودش

به اعتقاد گلدنبرگ ومیسون (۲۰۰۸) ارتباط ظریفی بین مثال و مثال نقض وجود دارد، با این توضیح که مثالی از یک مفهوم یا نظریه، مثال نقضی از تغییری نامناسب در ارائه همان مفهوم یا قضیه است که نقش و اهمیت آن را بیان می‌کند و می‌تواند محرکی برای اصلاح و بازبینی در تعریف باشد

انجام می‌دهد و بدین سبب، چی[14] و همکاران (۱۹۸۹)، آن را «اثر خود- تشـــریحی»[15] نامیده‌اند. محققان بر این عقیده‌اند که اســـتفاده مناسب از مثال‌های حل شده، به شرط درک فرایندها و ارتباطات موجود، تأثیر به‌سزایی در آموزش روش حل مسئله و کسب مهارت‌های شناختی دارد. تحقیقات ســـولر و کوپر[16] (۱۹۸۵) نشـــان داد که آموزش حل مسئله مبتنی بر مثال‌های حل شده، بسیار بهتر و مؤثرتر از آموزش حل مســـئله به شـــیوه تکرار و تمرین[17] (مسائل تمرینی/ تکراری) است. آنان همچنین، نشان دادند که استفاده از مثال‌های حل شده در ابتدای آموزش مهارت‌های شناختی، بسیار مؤثر است.

● مثال‌های تمرینی[18]

به اعتقاد واتســـون و میسون (۲۰۰۶)، «مثال‌های تمرینـــی» بدون حل هســـتند و به‌عنـــوان تکلیف، به یادگیرنده ارائه می‌شـــوند و هدفشان، ایجاد تبحر حل مســـائل در وی اســـت. این مثال‌ها می‌توانند یادگیری فراگیران و به‌ویژه عملکرد حل مســـئله آنان را افزایش دهند، به شرطی که طراحی و ارائه آن‌ها طوری باشدکه فراگیران را تشویق به خود- تشریحی وخود- استدلالی کنند (لیـــز و همـــکاران، ۲۰۰۶). مثال‌های تمرینی می‌توانند برای امتحانِ عملکرد و ارزیابیِ درک فراگیران مورد استفاده قرار گیرند. این نوع مثال‌ها، احتمالاً باید نســـبت به مثال‌هایی که جهت بالا بـــردن قوه تعمیم طراحی می‌شوند، ساختاری مشکل‌تر داشته باشند.

● مثال‌های از پیش طراحی شـــده[19] و مثال فی‌البداهه[20] (فوری)

«مثال‌هـــای از پیـــش طراحـــی شـــده»، آن‌هایی هســـتند که معلم، قبلاً طراحی‌شـــان کـــرده و در مورد نحوه اجرایشـــان، آگاهی دارد و قصدش این اســـت که آن مثال‌ها را با تدریس خـــود تلفیق کند. بنابراین، این مثال‌ها در طراحی تدریس معلمان، متن درسی که برای دانش‌آموزانشـــان آماده می‌کنند، کتاب درســـی، منابع تدریس یا گفته‌ها و فعالیت‌های معلمان، دیده می‌شوند (زودیک و زاسلاوسکی، ۲۰۰۸). در حالی که «مثال‌های فی‌البداهه (فوری)»، از قبل طراحی نشده‌اند و در لحظه و فوری و بر حســـب نیاز، ساخته می‌شوند و انتخابشان، مســـتلزم تصمیم‌گیری در لحظه است. این نوع مثال‌ها ممکن است کاملاً جدید باشند یا آن که جرح و تعدیلی از مثال‌هـــای قبلی و مثال‌های ارائه شـــده کلاس درس باشند (زودیک و زاسلاوســـکی، ۲۰۰۸). برای شناخت ایـــن نوع مثال‌ها، می‌تـــوان از عواملی مانند بیان وگفتار از پیش طراحی نشـــده معلم، مدت زمان اختصاص داده شده به تولید مثال، درنگ و تأمل یا تردید و دودلی معلم در ارائه مثـــال و حتی ظاهر معلم، به فی‌البداهه و فوری بودن یک مثال، پی برد. یک مثال از پیش تعیین شـــده، می‌توانـــد چند مؤلفه فی‌البداهه و فوری را در درون خود داشته باشـــد که معلم موقع طراحی مثال‌های معین، از آن آگاه نباشد، ولی درتعاملات کلاسی بروز کند. عموماً مثال‌های از پیش طراحی شـــده، از منابع در دســـترس معلمان و عمدتاً از کتاب‌های درسی استخراج می‌شوند و می‌توانند برای سطح خاصی از دانش‌آموزان یا مثلاً به صورت درجه‌بندی شده (از آسان به مشکل)، ارائه شوند. در حالی که مثال‌های فی‌البداهه و فوری معلمان، اغلب در پاسخ به سؤال‌ها یا ادعاهای دانش‌آموزان، در لحظه تولید می‌شوند. مثال‌های فوری، در تعاملات تدریس و بلافاصله و معمـــولاً با اســـتفاده از فضای مثال‌های در دســـترس معلمان، تولید می‌شـــوند. این لحظه‌ها، می‌توانند برای معلمان، فرصت‌هایی برای یادگیری باشند و این یادگیری منجر به غنی شدن فضای مثال آن‌ها نیز می‌شود. از نظر زودیک و زاسلاوسکی (۲۰۰۸)، دو هدف عمده و مهم از کاربرد مثال‌های فی‌البداهه و فوری عبارتند از:

۱. پاسخ به اظهارات دانش‌آموزان از قبیل ادعاهای نادرست (معمولاً با مثال‌های نقض).

۲. تشریح بیشتر مثال‌های از پیش طراحی شده و محدودیت‌ها و شرایط آنان.

زودیک و زاسلاوســـکی (۲۰۰۸)، احتمال انتخاب پارامترهـــای مبهم و دوپهلو یا پارامترهای متضادی که مثـــال را به حالتی غیرممکن و نشـــدنی تبدیل کنند، یک خطر جدی بـــرای کارآمدی مثال‌های فی‌البداهه، دانسته‌اند.

● مثال‌های تاریخی[21]

در بیانیه مشهور ۷۵ نفر از مشهورترین ریاضی‌دانان که در سال ۱۹۶۱ درباره برنامه درسی ریاضی دبیرستان منتشر شـــد و یکی از معتبرترین سندهای تاریخی در زمینه آموزش ریاضی محسوب می‌شود، آمده است که «یکی از بزرگترین امتیازها برای دانش‌آموزان هر رشته یا موضوع، خواندن سرگذشت و تاریخچه آن است، زیرا علم همیشه هنگامی به‌طور کامل ذاتی و هضم می‌شود که از نقطه آغازین آن شـــروع شـــود» (نقل شـــده در فدایی، ۱۳۸۵). به عقیده غروی‌مهدوی (۱۳۸۹)، یکی از مهم‌ترین راه‌هایی که برای یادگیری ریاضی، علاقه و انگیزه ایجاد می‌کند، بیان ریشه‌های تاریخی آن است.

گالاگـــر[22] (۱۹۹۱، نقـــل شـــده در پاپ‌آنتونیو و اجیلاپولوس، ۲۰۰۸) اشاره می‌کند که معلمان، دانش محدودی در زمینه فرایند تولید علم دارند و در بعضی

موارد، در طراحی تدریسی که به توسعه تصور علمی دانش‌آموزان کمک کند، ناتوان هستند. بدین سبب، طرح مثال‌های تاریخی که حاوی اطلاعاتی غنی در مورد تاریخ و ماهیت علم، فرایند تکامل علمی، باورهای مردم معمولی نسبت به پدیده‌های علمی در زمان‌های گوناگون تاریخی و چگونگی تطور مفاهیم علمی، می‌تواند بسترهای تحقیقاتی و علمیِ مناسبی برای معلمان ریاضی فراهم کند. توانمند شدن معلمان در این زمینه، می‌تواند به توسعه درک مفهومی دانش‌آموزان در بسیاری از زمینه‌های ریاضی و ایجاد انگیزه در آنان، کمک زیادی کند. البته ساختن مثال‌هایی که قابل استفاده در کلاس‌های درس باشند و در ارائه دیدگاه‌های تاریخیِ ریاضی، پشتیبان تدریس معلمان باشند، یک مشکل جدی است. بعضی از این مشکلات، مربوط به ماهیت مثال‌ها یا محدودیت‌های فیزیکی و تاریخی آن‌هاست و همین، معلمان را در استفاده از مثال‌ها به دانش‌آموزان، دچار چالش جدی می‌کند.

● مثال‌های نوعی[۲۳]

منظور از «مثال نوعی»، مثالی است که به‌صورت نمونه‌ای برای یک مفهوم، در ذهن یادگیرنده وجود دارد که در اولین قدم، وی با آن نمونه، درستی یا نادرستیِ آن مفهوم را با آن، می‌سنجد. این الگوها به صورت مستقیم و بی‌واسطه (یا شهودی) درک شده و به عنوان نشانگر یا نماینده مفهوم و بدون نیاز به تأیید یا استدلال خاصی، توسط یادگیرنده پذیرفته می‌شوند (تسامیر و همکاران، ۲۰۰۸). البته، تکیه صِرف به مثال‌های نوعی، محدودکننده است و ممکن است تأثیر منفیِ ناخواسته‌ای بر درک مفهومی و توانایی‌های استدلالیِ یادگیرندگان بگذارد (فیشباین، ۱۹۹۳). مثلاً، موازی بودن ارتفاع مثلث با لبه عمودی کاغذ یا موازی بودن اضلاع مربع با لبه‌های کاغذ به عنوان الگوهای اولیه، ممکن است یادگیرنده را در تشخیص مثلث یا مربعِ دوران یافته، دچار اشتباه کنند. بنابراین، آموزشگران ریاضی مثال‌های نوعی را دارای یک نقش دوگانه می‌دانند که هم کمک‌کننده و پشتیبان و هم مانعی در شکل‌گیری مفهوم هستند. مثال‌های نوعی به‌دلیل اینکه به سادگی قابل تشخیص‌اند، می‌توانند در شکل‌گیری اولیه مفهوم، کمک‌کننده باشند (ویلسون[۲۴]، ۱۹۹۰، نقل شده در تسامیر و همکاران، ۲۰۰۸).

● مثال‌های اساسی[۲۵] و مثال‌های پیوندی[۲۶]

زازکیس و چرنوف (۲۰۰۸)، به نقش «مثال‌های اساسی» و «مثال‌های پیوندی» در شناخت اشتباهات و حل مجدد مسائل، اشاره کرده‌اند. یک مثال اساسی، نقطه شروعی در درک شناختی فراگیران یا در رویکرد حل مسئله آنان، ایجاد کند، مانند مثال‌هایی که برای معرفی و شناساندن اشتباهات دانش‌آموزان و اصلاح و بازبینی و حل مجدد مسائل، ارائه می‌شوند. در واقع، مثال‌های اساسی، یادگیرندگان را در رسیدن به یک دگرگونی و تغییرمفهومی[۲۷]، کمک می‌کنند (فرشافل و ووسنیادو[۲۸]، ۲۰۰۴ و تیروش و تسامیر، ۲۰۰۴ نقل شده در زازکیس و چرنوف، ۲۰۰۸).

وقتی یک مثال اساسی، دانش‌آموزان را در شناخت اشتباهات و مرور مجدد حل مسائل یاری می‌کند، به یک مثال اساسی- پیوندی[۲۹] تبدیل می‌شود. «مثال پیوندی» مانند پلی ارتباطی، می‌تواند فراگیران را از درک‌های ناقص یا نادرست، به سوی درک مفهومی و عمیق، هدایت کند (زازکیس و چرنوف، ۲۰۰۸). البته برای یادگیرندگان، تشخیص اساسی بودن یا پیوندی بودن یک مثال در عمل، ساده نیست. ولی محققان می‌توانند قبل از به کار بردن مثال یا بعد ازکاربست یک مثال، نحوه عملکرد مثال‌ها و نقشی را که در درک مفهوم‌ها و حل مسئله‌ها ایفا می‌کنند، به استناد یافته‌های پژوهشی، پیش‌بینی کنند. بنابراین، مثال‌های پیوندی آن‌هایی هستند که یادگیرنده را از یک درک شخصیِ ناپخته و ناقص[۳۰]، به یک درک رایج و مناسب ریاضی[۳۱]، هدایت می‌کنند که این، یک ظرفیت پداگوژیکی بالاست.

در تحقیقی در این زمینه، زازکیس (۲۰۰۴) از یادگیرندگان خواست تا کسر $\frac{۱۷*۱۳}{۲۳*۱۹}$ را ساده کنند؛ تمرینی که دارای پیچیدگی و ظرافت خاصی است، زیرا صورت و مخرج آن، حاصل‌ضربی از دو عدد اول هستند. برای محقق جالب بود بداند که آیا فراگیران، متوجه می‌شوند که این کسر ساده‌شدنی نیست؟ اکثر فراگیران، صورت و مخرج کسر را به صورت ضرب شده یعنی $\frac{۲۲۱}{۴۳۷}$ نوشتند و دوباره، سعی کردندکه صورت و مخرج را ساده کنند. آنان برای این کار، ابتدا تقسیم‌پذیری مخرج یعنی ۴۳۷ را به اعداد ۲، ۳، ۴، ۵، ۶ و ۷، بررسی کردند و دریافتند که این عدد، بر هیچ‌یک از اعداد ۲ تا ۷، بخش‌پذیر نیست و به این دلیل، به اشتباه نتیجه گرفتند که ۴۳۷، عددی اول است. پس از آن، یادگیرندگان با کمک معلم، عدد ۴۳۷ را بر عدد ۱۹ تقسیم کرده و به خارج قسمت ۲۳ رسیدند و دریافتند که ۱۹×۲۳ = ۴۳۷. آن‌گاه نتیجه

تحقیقات سولر و کوپر (۱۹۸۵) نشان داد که آموزش حل مسئله مبتنی بر مثال‌های حل شده، بسیار بهتر و مؤثرتر از آموزش حل مسئله به شیوه تکرار و تمرین (مسائل تمرینی/ تکراری) است. آنان همچنین، نشان دادند که استفاده از مثال‌های حل شده در ابتدای آموزش مهارت‌های شناختی، بسیار مؤثر است

گرفتند که «مسئله، به حالت اولیه تبدیل شد». در حقیقت، عدم تشخیص این که عددی که از ضرب هر دو عدد اول یا غیراول - به غیر از ۱- حاصل شده است، دیگر اول نیست، این باور نادرست را در ذهن بسیاری از یادگیرندگان ایجاد کرد که «حاصل‌ضرب دوعدد اول هم اول است». آن‌ها با کمک معلم، فهمیدند که حاصل‌ضرب هر دو عدد به غیر از ۱- اول یا غیراول- دیگر اول نیست، زیرا که بر هر یک از آن دو عدد، بخش‌پذیر است.

برای این کار، معلم از مثال‌های عددی بیشتری مانند ۶ و ۱۵ استفاده کرد که هر کدام، یک مثال اساسی برای این فعالیت محسوب می‌شوند و به دانش‌آموزان نشان داد که ۵×۳=۱۵ که ۳ و ۵، هر دو اول هستند. هم‌چنین، ۳×۲=۶ که ۲ و ۳ نیز هر دو اول‌اند، ولی ۱۵و ۶، هیچ‌کدام اول نیستند. با این فعالیت، دانش‌آموزان دریافتند که «مجموعه اعداد اول نسبت به عمل ضرب، یک مجموعه بسته نیست» و حاصل‌ضرب دوعدد اول، یک عدد اول نیست. به کمک این مثال‌ها، دانش‌آموزان یک نقطه شروع و سرنخی به‌دست آوردند تا با این درک جدید، بدفهمی خود را اصلاح کرده و به حل مجدد مسئله، بپردازند.

البته زازکیس و لیلدال (۲۰۰۴)، بیان می‌کنند که وقتی از فراگیران خواستند که اول بودن یک عدد را بررسی کنند، اکثرشان تقسیم‌پذیری را تنها با اعداد اولِ کوچک‌تر از آن عدد یعنی ۲ و ۳ و۵ و۷ امتحان کردند زیرا باور داشتند که هر عدد مرکبی، یک مقسوم‌علیه اول کوچک‌تر از خود دارد. زازکیس(۲۰۰۴) در رویارویی با این باور نادرست و اصلاح آن، از مثال پیوندی ۷۷ استفاده کرد. انتخاب عدد ۷۷ به این دلیل بود که نه مانند ۱۵و۶ کوچک و مأنوس و نه مانند ۴۳۷ بزرگ و نامأنوس بود. این در حالی است که اگرچه ساختار اعداد ۶، ۱۵، ۷۷، ۲۲۱ و ۴۳۷، مشابه هستند و همگی، حاصل‌ضربی از دو عدد اول‌اند، ولی اعداد ۶، ۱۵ و۷۷، مثال‌های نقضی بودند که در به چالش کشیدن باور نادرستی که آنان داشتند، نقش مهمی بازی کردند. در خصوص ساده کردن اعداد در کسر $\frac{۱۷*۱۳}{۲۳*۱۹}$ این ادعا که چهارعدد اول متفاوت نمی‌توانند ساده شوند و این که هیچ عدد اولی تجزیه‌شدنی نیست و فقط به یک صورت قابل نمایش است، یک نتیجه از «قضیه اساسی حساب» است. ولی باور این حقیقت، وقتی که اعداد از ۱۰ بزرگ‌تر بودند، برای دانش آموزان ساده نبود.

مثال‌های پیوندی آن‌هایی هستند که یادگیرنده را از یک درک شخصیِ ناپخته و ناقصِ، به یک درک رایج و مناسب ریاضی، هدایت می‌کنند که این، یک ظرفیت پداگوژیکی بالاست

پی‌نوشت‌ها

1. Instructional example
2. Process or Class
3. Rissland & Michener
4. Start-up Examples
5. Reference Examples
6. Model or Generic Examples
7. Paradigms
8. Counterexamples
9. Specific, Semi-General and General Counterexamples
10. Boundary Examples
11. Weierstrass
12. Gray and Tall
13. Worked Examples
14. Chi
15. Self-Explanation Effect
16. Sweller & Cooper
17. Practice
18. Exercise Examples
19. Pre-planned Examples
20. Spontaneous Examples
21. Historical Examples
22. Gallagher
23. Prototypical Example
24. Wilson
25. Pivotal
26. Bridging
27. Conceptual Change
28. Vosniadou and Verschaffel
29. Pivotal –Bridging
30. Naïve or Incomplete Personal Conceptions
31. Mathematicaly Coventional Appropriate Conceptions

منابع

۱. کثیری، حسین. (۱۳۸۸). **نقش مثال در آموزش ریاضی**. پایان‌نامه کارشناسی ارشد منتشر نشده آموزش ریاضی. دانشگاه شهید بهشتی دانشکده علوم ریاضی.

2. Zaslavski,O. & Lavi , O.. Teacher's use of instructional Examples. (2008)
3. Goldenberg, P. & Mason, J.. Shedding light on and with example Spaces. (2008)
4. Watson, A. & Shipman, S.. Using learner generated Examples to introduce new Concepts. (2008)
5. Zodik, I. & Zaslavsky, O. Characteristics of teacher's choice of examples in and for the Mathematics classroom .(2008)
6. Zazkis, R. Lelcin, R. Examplifying definitions: a case of a square. (2008)
7. Rowland, T. The purpose,design and use to examples in the teachery elementary mathermatics. (2008)
8. Liz. Bills. Dreyfus, T. Mason, J. Tsamir, P. Watson, A Zaslavsky, O.Examplification in mathematics Edueation . (2006)
9. Alcock, L. Matthew, I. Doctoral student use of examples in evaduation and provting contiecture. (2008)